1. Fundamentos da Mecânica Newtoniana (Leis de Newton)

1.1. Introdução

Na Mecânica procura estabelecer-se um conjunto de leis físicas que forneçam um método matemático para descrever o movimento de um ponto material ou de um conjunto de pontos materiais.

A formulação newtoniana da Mecânica Clássica assenta em quatro conceitos fundamentais. O primeiro diz respeito à distância (espaço), esta noção é entendida, de forma intuitiva, com base em considerações geométricas; o segundo é o tempo e corresponde à medida da sucessão dos acontecimentos, é considerado como uma entidade absoluta, capaz de ser definida por um observador qualquer. É da inter-relação entre estes dois conceitos que surge o estudo do movimento, aparecendo, então, as definições de velocidade e aceleração de um ponto material. Do estudo de todas estas grandezas, das suas relações matemáticas, ocupa-se a cinemática. O terceiro conceito fundamental a ser empregue é o de massa que, embora também utilizado intuitivamente, requer para a sua elaboração e compreensão o uso das próprias leis fundamentais da Mecânica Clássica (as conhecidas Leis de Newton). Newton incorporou ainda na sua construção axiomática um outro conceito fundamental, o quarto, que, como tal, merece o privilégio de aparecer nas primeiras definições dos seus Principia e que se designa por força.

Espaço, tempo, massa e força são as quatro grandezas essenciais sobre as quais Newton erigiu toda a Mecânica.

As leis físicas, introduzidas logo de início por Newton e base de toda a Mecânica Clássica, alicerçam-se em observações experimentais. Podiam não ser assim, mas são. E são porque as observações conduzem a estes enunciados. Estas leis podem ser entendidas como postulados ditados pela Natureza. Se as suas implicações, toda a teoria construida que delas deriva, também estão de acordo com a observação da Natureza, então, consistentemente, podem aceitar-se estes postulados como verdadeiros. Eles assumem, portanto, a categoria de leis físicas, isto é, verdades manifestadas pela própria Natureza.

Se a experiência ou a observação não estiver de acordo com as consequências deriváveis das leis, então a teoria tem que ser modificada no sentido de se tornar coerente com os factos observados já conhecidos. Contudo, nem sempre esta tarefa consegue ser levada a bom termo, havendo observações que, muitas vezes, não são enquadráveis pela teoria e, embora esta se procure ajustar aos novos factos, este propósito resulta impossível. Está-se, portanto, na eminência de alterações das próprias leis. Estas devem ser entendidas como verdades relativas manifestadas pela Natureza. São relativas porque dependem da capacidade do homem, numa determinada época histórica, em perscrutar e entender o real, e alterá-las provocará uma verdadeira crise no corpo de conhecimentos científicos, prenúncio daquilo a que alguns historiadores definem como uma revolução científica.

A primeira exposição sistemática, e rigorosa sob o ponto de vista matemático, da Mecânica foi apresentada por Newton nos seus Principia. É nesta construção, bem como no

próprio método empregue, que assenta todo o edifício ulterior da Mecânica do Corpo Rígido e da Mecânica Celeste.

No primeiro parágrafo desta introdução referiu-se, sem a preocupação de definir, as noções de ponto material e sistemas de pontos materiais. Designa-se ponto material como sendo toda a quantidade de matéria cuja posição pode ser bem definida por um ponto geométrico. Não se deve ficar com a ideia que esta quantidade de matéria é necessariamente pequena, um planeta ou uma estrela podem ser considerados como pontos materiais desde que estejam suficientemente afastados em relação ao observador que os estuda. A realidade física é mais complexa, a natureza manifesta a existência de corpos cujas dimensões, na grande maioria dos casos, estão longe de serem "pontos", contudo o seu comportamento, ao nível da mecânica, pode ser associado a um ponto material. É nesta acepção que em todo este capítulo se utilizará o termo "corpo". Em muitos compêndios de mecânica surge amiúde o termo de partícula material, pequena quantidade de matéria de dimensões reduzidas, como sinónimo de ponto material. Nas linhas que se seguem evitar-se-á esta designação, optando-se pela expressão ponto material que se julga mais adequada ao tratamento matemático da mecânica e não está forçosamente associada à pequena quantidade de matéria de dimensões muito reduzidas.

1.2. Leis de Newton

Eis os enunciados das leis de Newton retirados da edição de 1726 dos Principia e traduzidos em português:

I - Todo o corpo permanece no seu estado de repouso, ou de movimento uniforme rectilíneo, a não ser que seja compelido a mudar esse estado devido à acção de forças aplicadas.

II - A variação de movimento é proporcional à força motriz aplicada; e dá-se na direcção da recta segundo a qual a força está aplicada.

III- A toda a acção sempre se opõe uma reacção igual; ou, as acções mútuas de dois corpos são sempre iguais e dirigidas às partes contrárias.

Antes de se analisar o significado destas leis, importa clarificar algumas ideias sobre todo o corpo teórico da Mecânica erigido por Newton. Os Principia foram escritos numa forma dita geométrica, isto é, na forma de um sistema hipotético-deductivo. Como facilmente se depreende dos enunciados apresentados, os três axiomas definem relações entre termos, ou grandezas, tais como movimento uniforme rectilíneo, variação do movimento, força aplicada, acção e reacção. Daí que, anteriormente à apresentação dos axiomas, a exposição newtoniana se inicie com um conjunto de oito definições prévias, incidindo fundamentalmente sobre os conceitos empregues nas leis do movimento. A Definição I debruça-se sobre a noção de quantidade de matéria ou massa; Newton define esta grandeza como o produto da densidade pelo volume. É legítimo perguntar: o que é a densidade? A esta questão não é dada qualquer resposta, parte-se do princípio que a densidade é um dado a priori. No seu comentário à definição de quantidade de matéria, o autor dos Principia escreve: «E é a esta quantidade que, a partir de agora, passarei a designar por corpo ou massa; é proporcional ao peso, como eu determinei por experiências com pêndulos». Sublinhe-se para já a referência à relação entre massa e peso; mais adiante voltar-se-á a esta questão. A Definição II caracterisa a grandeza quantidade de movimento, a sua expressão é mv, o produto da massa pela velocidade...

PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore J S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.
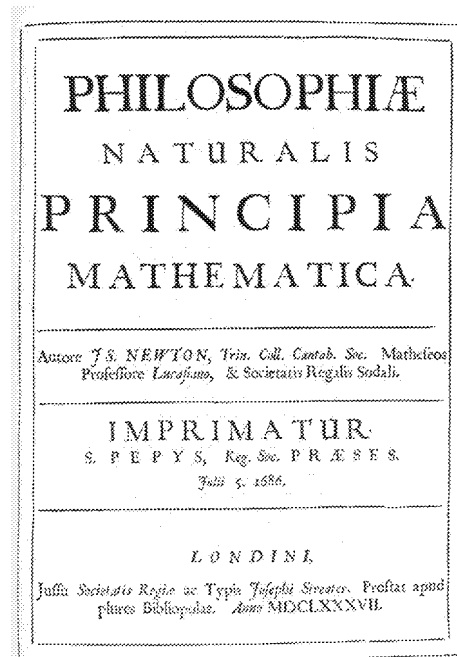
Fig..1.1:- Capa da primeira edição dos *Principia*.

Posto isto, atente-se agora nas três leis de Newton. O primeiro axioma, ou Primeira Lei, é vulgarmente interpretada como a Lei da Inércia. No universo newtoniano esta lei associa à alteração do estado de movimento de um corpo, o aparecimento de uma grandeza denominada força aplicada. Uma consequência importante desta Lei é a existência de sistemas privilegiados de referência, referenciais inerciais, que serão definidos ainda neste capítulo.

O segundo axioma relaciona a força aplicada com a variação de movimento $(F = \propto \Delta p)$ ou, de forma mais correcta, com a variação temporal da quantidade de movimento, o produto da massa pela velocidade,

$$\boldsymbol{F} = \frac{d}{dt}\,(m\boldsymbol{v}) \qquad 1.1$$

esta é a expressão da segunda Lei de Newton escrita vectorialmente, forma apresentada pela primeira vez pelo matemático Leonard Euler e que Newton nunca usou nos Principia.

A apresentação deste postulado como lei implica a existência de uma relação entre grandezas, entendidas estas, evidentemente, como entidades físicas mensuráveis. Mas, como anteriormente se escreveu, Newton, nas suas definições prévias, nada diz como medir massa e força. Logo a Segunda Lei não se pode constituir como tal, sendo, por muitos autores, apresentada antes como a forma de definir a grandeza física força: a força é uma grandeza que resulta do produto da massa pela aceleração. Sublinhe-se ainda, no conteúdo deste segundo axioma, a ausência prévia de uma definição clara do conceito de massa.

O terceiro axioma acrescenta uma característica nova ao conceito de força: o seu aspecto dual; a existência de acção e reacção simultâneas. Esta é uma conclusão nova e muito importante. Há, no entanto, que chamar a atenção para o facto de esta terceira lei não ser uma Lei Geral da Natureza, isto é, não é válida para qualquer tipo de forças. Esta lei só se aplica a

forças que resultam da interacção de dois pontos materiais e cuja direcção coincide com a linha que une os pontos, ou seja, só se aplica às chamadas forças centrais.

Nos Principia, imediatamente após o enunciado das três que leis acabadas de referir, Newton apresenta a célebre regra do paralelogramo para a composição de duas forças que actuam num corpo na forma de dois corolários em que o primeiro é o seguinte:

> «Corolário I- Um corpo sujeito à acção simultânea de duas forças, deverá descrever a diagonal de um paralelogramo no mesmo tempo em que descreveria cada um dos lados quando actuado por cada uma das forças separadamente.» (Isaac Newton, 1962, Principia, Berkeley, University of California Press (de acordo c/ a edição inglesa de 1729)).

Este corolário corresponde à ideia que as forças actuantes sobre um corpo são independentes entre si. Isto é, a força resultante que se faz sentir sobre o corpo corresponde à soma de cada uma das forças no caso de elas actuarem separadamente. Este corolário enunciado por Newton constitui o princípio da independência dos efeitos das forças, ou o princípio da composição das forças.

As três leis e a regra da composição de forças constituem os princípios básicos da mecânica newtoniana e sobre os quais é edificada toda a Dinâmica.

1.3. Clarificação da noção de força; noção de massa inercial

A obra de Newton foi sujeita, logo após a sua publicação, a fortes críticas, sobretudo no que diz respeito aos seus conceitos fundamentais, englobando-se aqui, evidentemente, os conceitos de massa e de força. Seria, efectivamente, necessário a definição a priori da força para erigir toda a mecânica? E o conceito de massa? O que significava quantidade de matéria, qual a sua relação com a inércia?

Na segunda metade do sec.XIX, o físico austríaco Ernst Mach reconstruiu o edifício da Mecânica newtoniana com base nas assunções seguintes:

1. Os corpos induzem uns sobre os outros acelerações contrárias segundo a sua direcção ao longo das linhas que os unem.
2. A razão inversa e negativa das acelerações mutuamente induzidas por quaisquer dois corpos é a razão entre as suas massas.
3. Esta razão de massas é independente das características dos estados físicos dos corpos.
4 A aceleração induzida por um determinado número de corpos num dado corpo é independente de cada um.
5. O produto da massa e da aceleração induzida num dado corpo é chamada a força aplicada.

Como se pode constatar na elaboração de Mach, os conceitos de força e massa correspondem a expressões matemáticas que relacionam medidas de espaço e tempo. O valor da massa de um ponto material corresponde à razão entre esta e a de um outro ponto de massa unitária, um padrão escolhido. Assumindo a formulação deste autor, a primeira lei de Newton poder-se-ia enunciar do seguinte modo:

> A aceleração de um ponto material é sempre produzida por outros pontos materiais; se o ponto material é um ponto isolado, isto é, infinitamente afastado de qualquer outro, a sua aceleração é nula, ou, por outras palavras, a sua velocidade é constante (o movimento é uniforme) ou é também nula (o ponto está em repouso) (Mário Silva, s/data, *Lições de Física -vol.I*, Coimbra, Livraria Almedina)

A segunda lei de Newton, de acordo com a 5ª proposição de Mach, corresponde efectivamente à definição de força. **A força, é determinada pelas interacções induzidas pelos corpos, uns sobre os outros, segundo as linhas que os unem; identificar os corpos que actuam sobre o corpo em estudo corresponde a identificar as forças que actuam sobre este**.

O princípio da composição das forças que Newton enunciara na forma da regra do paralelogramo corresponde à terceira assunção de Mach. Assim, dados três pontos materiais $(1, 2, 3)$, seja a_{12} a aceleração provocada pelo corpo (2) em (1), logo a aceleração sofrida por (1) devido à acção dos outros dois é

$$\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_{12} + \boldsymbol{a}_{13}$$

Multiplicando ambos os termos pela massa de (1), m_1, a expressão anterior aparece escrita

$$m_1\boldsymbol{a}_1 = m_1\boldsymbol{a}_{12} + m_1\boldsymbol{a}_{13} \qquad 1.2$$

ou seja: ***quando um ponto material está submetido à acção de várias forças simultâneas, podemos substituir estas forças pela sua resultante***.

Tendo presente as assunções de Mach, **pode extrair-se da Terceira Lei de Newton a definição de massa, ou massa inercial**.

Num determinado sistema de referência, considerem-se dois pontos materiais, 1 e 2, a uma certa distância um do outro, mas ambos infinitamente afastados de todos os outros pontos materiais. Os dois pontos considerados exercem acções mútuas que se traduzem no aparecimento de forças: $\boldsymbol{F_{12}}$ no ponto 1 devido à acção de 2 e $\boldsymbol{F_{21}}$ no ponto 2 devido à acção de 1. Então, pela Terceira Lei,

$$\frac{\boldsymbol{F}_{12}}{-\boldsymbol{F}_{21}} = 1$$

o que, de acordo com a Segunda Lei, se pode escrever $m_1 \frac{d\boldsymbol{v}_1}{dt} = -m_2 \frac{d\boldsymbol{v}_2}{dt}$ ou, sabendo que a variação temporal de $\boldsymbol{v}_1$ corresponde à aceleração do corpo 1 provocada pela interacção de 2 (analogamente para o corpo 2),

$$\frac{\boldsymbol{a}_{12}}{-\boldsymbol{a}_{21}} = \frac{m_2}{m_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{|\boldsymbol{a}_{12}|}{|\boldsymbol{a}_{21}|} = \frac{m_2}{m_1}$$

Se m_1 for a unidade de massa, conhecidas as acelerações, esta relação determina m_2. A conclusão obtida corresponde à primeira proposição de Mach, prescindindo-se, deste modo, da definição a priori de massa, implícita na formulação newtoniana.

A determinação da massa é feita com base no estudo do movimento e o conhecimento da força resulta do produto da massa pela aceleração. *Da necessidade de quatro conceitos fundamentais (espaço, tempo, massa e força) na formulação newtoniana, a mecânica clássica passa a precisar somente de dois conceitos essenciais, espaço e tempo*.

Na prática uma das formas mais correntes de determinar a massa de um corpo não é a que se acabou de apresentar, mas sim pesá-lo (o que também corresponde a uma comparação com um corpo padrão). Este procedimento assenta no conhecimento que o peso do corpo, $\boldsymbol{W}$, corresponde à força gravítica que actua sobre ele. Pela Segunda Lei de Newton

$$\boldsymbol{W} = m\boldsymbol{g}$$

em que g é a aceleração da gravidade local. A correcção deste método assenta no facto da massa de um corpo, determinada com base na Terceira Lei de Newton (massa inercial), ser igual à mesma grandeza que aparece na expressão da força gravítica (massa gravítica). É importante definir estes dois conceitos: <u>*massa inercial*</u> é a **massa que determina**

a aceleração de um corpo quando sujeito à acção de uma força e massa gravítica é a **massa que determina a força gravítica existente entre um corpo e outros corpos**.

> «Devemos salientar o caracter experimental de uma tal identificação [massa inercial e massa gravítica]. A sua razão profunda, teórica, é inexplicável no domínio da mecânica newtoniana. A Mecânica Clássica aceitou como um facto da experiência a identidade das duas massas mas nunca pôde explicá-lo. A explicação só apareceu com Einstein no desenvoplvimento da sua teoria da relatividade» (Mário Silva, s/data, *Lições de Física -vol.I*, Coimbra, Livraria Almedina).

1.4. Sistemas de Referência

Newton sabia que as suas leis dinâmicas do movimento só faziam sentido se se definisse um sistema de eixos, um referencial ou sistema de referência, em relacão ao qual se pudessem fazer as medidas sobre o movimento dos corpos. Todavia, nos enunciados das Leis de Newton não se faz qualquer menção ao sistema de referência em relação ao qual essas leis são verdadeiras. E isto acontece porque o próprio Newton admitiu, previamente ao enunciado das leis, a existência de um espaço absoluto que «*na sua própria natureza, sem comparação a nada de exterior, permanece sempre o mesmo e inamovível*», o que o obrigou também a definir um espaço relativo correspondendo «*a uma dimensão ou medida movível do espaço absoluto*». Portanto, do ponto de vista newtoniano, o movimento a que se referem as suas leis é o movimento absoluto que possui como referencial o espaço absoluto.

Será que existe de facto essa entidade em relação à qual tudo se move? E por ser de grande dificuldade, não impossível, responder a esta questão, o problema passa a ser colocado de forma inversa: admitem-se como válidas as leis de Newton (elas podem ser comprovadas experimentalmente) e, nestas condições, define-se o sistema de eixos necessário à legitimação dessa validade. O tal *espaço absoluto é definido como aquele em relação ao qual se verificam os três postulados newtonianos, contrariamente à presunção inicial, ou seja, o enunciado das leis implica a existência prévia do espaço absoluto*.

Tal como Newton admitiu a existência do espaço absoluto, também definiu o tempo «*absoluto, verdadeiro e matemático*» que «*da sua própria natureza fluiria de uma forma igual sem relação com qualquer coisa de exterior*». Esta noção newtoniana, tal como a de espaço absoluto, esteve sempre sob a mira dos críticos: se o tempo «*fluia de uma forma igual*», de modo uniforme, isto deveria implicar a existência de qualquer coisa que controlaria a forma como se desenrolava esse fluxo. No entanto, o próprio Newton acrescentava que o tempo absoluto fluia «*sem relação com qualquer coisa exterior*», então, não seria possível controlar a uniformidade do fluir temporal. O tempo absoluto apresentava-se, assim, como uma entidade fisicamente impossível de definir, de aceitação exclusivamente metafísica. É com a teoria da relatividade que este conceito é ultrapassado, definindo-se o processo físico de comparar instantes ditos simultâneos, sem recorrer a esse termo de comparação que é o tempo absoluto.

Define-se **referencial de inércia como aquele em relação ao qual são válidas as leis de Newton**. Todavia, ainda de acordo com a Primeira Lei, **qualquer sistema de eixos**, movendo-se com velocidade uniforme e rectilineamente em relação ao referencial absoluto, **também será um referencial de inércia**. Estes são os sistemas de eixos privilegiados que se utilizam na Mecânica Clássica.

Modernamente, de acordo com a teoria da relatividade, não tem qualquer significado a assunção do conceito de espaço absoluto. Esta teoria desenvolvida por Einstein,

embora considerando os sistemas de referência que já eram os adoptados pela Mecânica newtoniana, define-os de uma forma rigorosa.

Considerem-se dois sistemas de eixos, S e S', animados, um em relação ao outro, de movimento uniforme e rectilíneo, conforme o que está representado na Fig.1.1. A representação adoptada mostra que os dois sistemas de eixos possuem o mesmo conjunto de versores (i,j,k), logo a trajectória de qualquer ponto material, P, será para S e S', respectivamente,

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(t) = x_1(t)i + x_2(t)\boldsymbol{j} + x_3(t)\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{x'}(t) = x'_1(t)\boldsymbol{i} + x'_2(t)\boldsymbol{j} + x'_3(t)\boldsymbol{k} \end{cases} \qquad 1.3$$
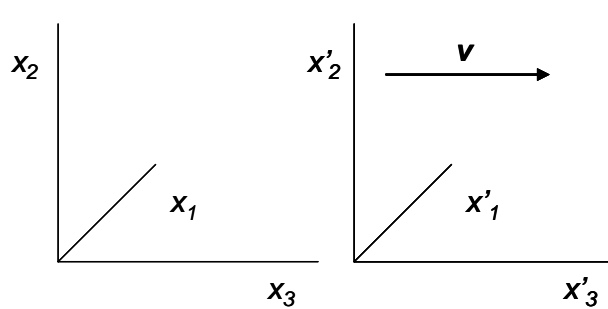
Fig.1.2:- Dois sistemas de eixos, S e S', animados, um em relação ao outro, de movimento uniforme e rectilíneo (a velocidade é $\boldsymbol{v}$ e possui a direcção $\boldsymbol{k}$).

Por uma questão de simplicidade a velocidade, $\boldsymbol{v}$, possui a direcção $\boldsymbol{k}$**,** donde a transformacão de coordenadas entre os dois sistemas de eixos, omitindo a dependência do tempo em todas as coordenadas, é

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 \\ x'_2 = x_2 \\ x'_3 = x_3 - vt \end{cases} \qquad 1.4$$

Na física newtoniana espaço e tempo são duas entidades completamente distintas, sendo esta última independente do sistema de eixos usado; o tempo flui de igual forma em todos os refenciais, logo

$$t = t' \qquad 1.5$$

O conjunto das quatro equacões (1.4) e (1.5) designa-se por *Transformação de Galileu*. Os referenciais, **sistemas de eixos e relógio**, que obedecem à transformação matematicamente descrita pelo sistema (1.4) e (1.5) são os referenciais inerciais, sistemas de referência *em relação aos quais são válidas as leis de Newton*. Como todas as outras leis da mecânica surgem como consequências deduzíveis destas, podemos enunciar a seguinte lei básica da natureza conhecida como o *Princípio da Relatividade de Galileu:* **As leis da Mecânica são igualmente válidas em todos os referenciais inerciais**.

Em *primeira aproximação* pode dizer-se que os referenciais ligados à Terra são referenciais inerciais. Estes referenciais utilizam-se para o estudo de fenómenos onde o movimento da Terra não influencia grandemente a observação e experimentação. Contudo para outros fenómenos, observação das estrelas, movimento dos planetas do sistema solar, o referencial ligado à Terra não se comporta como um referencial inercial. Nestes casos ter-se-á que usar um outro referencial. Em *segunda aproximação* o referencial inercial será um sistema de eixos com origem no centro de massa do Sol estando os eixos apontados na direcção de três estrelas "fixas" e designa-se por Referencial de Copérnico.

Chama-se *observador* a qualquer sistema físico capaz de efectuar medidas. Na mecânica o observador terá que estar munido de uma régua e de um relógio, de modo a conhecer as suas grandezas fundamentais que são o espaço e o tempo, respectivamente. De acordo com (1.4) e (1.5) como é que observadores situados em referenciais inerciais diferentes comparam as velocidades e acelerações de um determinado movimento?

Derivando em ordem ao tempo t, e como $t = t'$, as expressões (1.4) podem escrever-se

$$\begin{cases} \frac{dx'_1}{dt} = \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx'_2}{dt} = \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx'_3}{dt} = \frac{dx_3}{dt} - v \end{cases} \quad 1.6$$

o que permite concluir que a velocidade medida em S', $\boldsymbol{u}$', é dada por

$$\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \quad 1.7$$

expressão clássica de composição de velocidades para dois referenciais inerciais. Derivando novamente em ordem ao tempo t a expressão (1.7), facilmente se conclui que as acelerações em ambos os referenciais são iguais.

Das equações (1.4) determina-se que a distância espacial entre dois acontecimentos simultâneos é um invariante. Por outro lado de (1.5) obtem-se também que, dados dois acontecimentos A e B, os intervalos de tempo entre eles são iguais em ambos os referenciais

$$\Delta t = \Delta t' \quad 1.8$$

Do conjunto de expressões da Transformação de Galileu conclui-se que na Física Newtoniana o intervalo de tempo Δt e a distância Δl para dois acontecimentos simultâneos são dois invariantes.

A conclusão (1.8) implica o caracter absoluto da simultaneidade de dois acontecimentos na física newtoniana: o que é simultâneo para um observador situado em S, sê-lo-á também para um outro situado em S'. A existência de simultaneidade absoluta obrigaria à possibilidade de sincronizar os relógios em qualquer referencial por forma a marcarem todos o mesmo tempo nos mesmos instantes; o que é equivalente a afirmar que um sinal, não importa a sua natureza,

> «num dado sistema, poderia ser transmitido com velocidade infinita a qualquer outro sistema, e portanto recebido no mesmo instante por este outro sistema»(Mário Silva, s/data, Lições de Física - vol.I, Coimbra, Livraria Almedina).

Esta situação, fisicamente paradoxal, só vem a ser resolvida com a Teoria da Relatividade Restrita.

1.5. O problema da medida e as limitações da Mecânica Newtoniana

Todo o edifício da Mecânica Clássica assenta em dois conceitos fundamentais: o espaço e o tempo; deles derivam uma série de grandezas estudadas tais como o momento, linear e cinético, a energia...

Os cálculos destas grandezas, os resultados que se obtêm, dependem dos aparelhos usados para as medições de espaço e de tempo; quanto mais precisos forem os aparelhos, mais rigorosos serão os resultados numéricos a que se chegará. Todavia, existem limitações físicas objectivas para a precisão das medidas efectuadas.

Heisenberg mostrou em 1927, com o Princípio da Incerteza, que ao nível das dimensões atómicas o acto de medir implica a introdução de importantes perturbações no objecto da medição. Este facto implica que, para um electrão, não é possível conhecer, medir, o valor da sua posição e da sua velocidade, do seu momento linear, com uma precisão infinita.

O erro cometido na determinação destas duas grandezas Δx, para a localização, e Δp, para o momento linear, é tal que

$$\Delta x \cdot \Delta p \;\geq\; 10^{-34} N.s \qquad 1.9$$

Ou seja, conhecer de uma forma precisa a posição, $\Delta x \to 0$, implica para o momento $\Delta p \to \infty$.

Se no mundo atómico não é possível o conhecimento simultâneo da posição e do momento linear, as leis da Mecânica Clássica, bem como todas as suas consequências, não são passíveis de ser aplicadas neste domínio. Para o infinitamente pequeno desenvolveu-se uma nova descrição mecânica conhecida como a Mecânica Quântica.

Uma outra limitação da Mecânica de Newton tem a ver com o princípio da existência de um tempo absoluto, isto é com a capacidade de um observador saber se dois acontecimentos, situados a uma distância qualquer, ocorrem simultaneamente. Esta capacidade implicaria a possibilidade de uma comunicação, envio de sinais, permitindo a comparação da simultaneidade, a uma velocidade infinita, isto é, o conhecimento instantâneo do que se passa em qualquer ponto do espaço. Sabe-se que a velocidade máxima com que se pode transmitir qualquer sinal é da ordem de

$$c \simeq 3 \times 10^{8}\; m \cdot s^{-1}$$

Esta limitação imposta pela própria natureza levou à construção de uma nova mecânica, a Teoria da Relatividade Restrita, elaborada por Einstein.

A Mecânica de Newton está assim sujeita a limitações fundamentais para dois domínios particulares de fenómenos naturais: o *muito pequeno* e o *muito rápido*.

1.6. Recapitulação de alguns conceitos fundamentais da cinemática

Diz-se que o ponto $P(x_1, x_2, x_3)$ está em movimento se, em relação a um referencial S, ele ocupa, em instantes sucessivos, posições diferentes. Há movimento se a posição do ponto P varia com o tempo e matematicamente esta relação é dada pela dependencia do raio vector (posição) com o tempo:

$$\boldsymbol{r}(t) \;= x_1(t)\boldsymbol{i} + x_2(t)\boldsymbol{j} + x_3(t)\boldsymbol{k} \qquad 1.10$$

Trajectória do movimento é o lugar geométrico das posições ocupadas pelo ponto durante o seu movimento.

A *velocidade do movimento* de um ponto material é uma grandeza que corresponde à taxa de variação do espaço com o tempo; analiticamente a velocidade é dada pela derivada do vector posição em relação ao tempo, $\boldsymbol{v}(t) = \frac{d}{dt}(\,\boldsymbol{r}(t))$, logo a sua expressão vectorial é dada por

$$\boldsymbol{v}(t) \;= \frac{dx_1(t)}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dx_2(t)}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{dx_3(t)}{dt}\boldsymbol{k} \qquad 1.11$$

ou

$$\boldsymbol{v}(t) = v_1(t)\boldsymbol{i} + v_2(t)\boldsymbol{j} + v_3(t)\boldsymbol{k}$$

Por definição de derivada, a velocidade é dada por $\boldsymbol{v}(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}$; como Δs representa o deslocamento do ponto material sobre a atrajectória no intervalo de tempo Δt (fig.1.3),pode

ainda escrever-se $\boldsymbol{v}(t) = \underset{\Delta t \to 0}{lim} \frac{\Delta \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t} \frac{\Delta s}{\Delta s}$ ou $v(t) = \underset{\Delta t \to 0}{lim} \frac{\Delta r(t)}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Todavia $\boldsymbol{\Delta} r(t) \simeq \Delta s$, sendo iguais quando $\Delta s \to 0$, então $\underset{\Delta t \to 0}{lim} \frac{\boldsymbol{\Delta r}(t)}{\Delta s}$ representa o vector unitário à trajectória no ponto $P(x_1, x_2, x_3)$, $\underset{\Delta t \to 0}{lim} \frac{\boldsymbol{\Delta r}(t)}{\Delta s} = \boldsymbol{u_t}$, e, por outro lado, $\underset{\Delta t \to 0}{lim} \frac{\Delta \mathrm{s}}{\Delta \mathrm{t}} = \|\vec{v}\|$. Finalmente pode escrever-se

$$\boldsymbol{v}(t) = \|\boldsymbol{v}\| \, \boldsymbol{u_t} \qquad 1.12$$

a *velocidade é sempre tangente à trajectória no ponto considerado*.

A *aceleração do movimento* de um ponto material é uma grandeza que corresponde à taxa de variação da velocidade com o tempo; analiticamente a aceleração é dada pela derivada do vector velocidade em relação ao tempo, $a(t) = \frac{d}{dt}(\, v(t))$ ou $a(t) = \frac{d^2 r(t)}{dt^2}$, logo a sua expressão vectorial é dada por

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{dv_1(t)}{dt} \, \boldsymbol{i} + \frac{dv_2(t)}{dt} \, \boldsymbol{j} + \frac{dv_3(t)}{dt} \, \boldsymbol{k} \qquad 1.13$$

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} \, \boldsymbol{i} + \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} \, \boldsymbol{j} + \frac{d^2 x_3(t)}{dt^2} \, \boldsymbol{k}$$

ou

$$\boldsymbol{a}(t) = a_1(t)\boldsymbol{i} + a_2(t)\boldsymbol{j} + a_3(t)\,\boldsymbol{k}$$
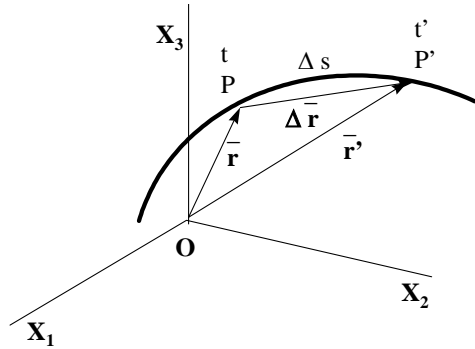
Fig.1.3:- Representação do movimento nos instantes t e $t' = t + \Delta t$.

Fig.1.4:- Velocidad do movimento em dois instantes t e t' .
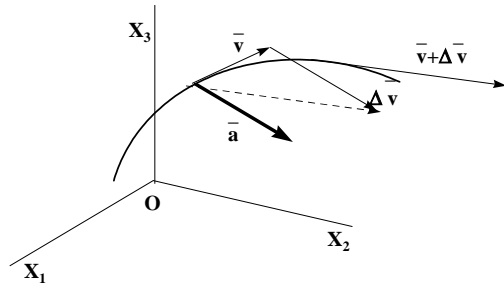
Fig.1.5:- A acekeração do movimento no instante t .
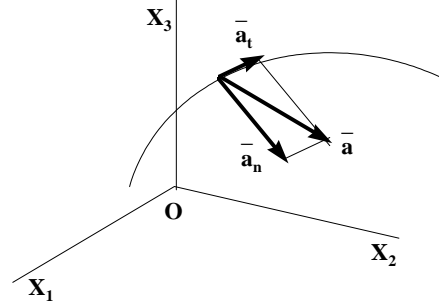
Fig.1.6:- A acekeração do movimento no instante t .

Graficamente esta grandeza está representada na Fig.1.6. Esta representação permite verificar que no plano da trajectória a aceleração se pode decompôr numa componente tangencial ($\boldsymbol{a_t}$)e numa outra que se denomina normal ($\boldsymbol{a_n}$)(Fig.1.6) . De acordo com 1.12 e 1.13, fazendo $v = \|\boldsymbol{v}\|$, $\boldsymbol{a_t} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{v_t})$, então

$$\boldsymbol{a}(t) = \underbrace{\frac{dv}{dt} \, \boldsymbol{u_t}} + \underbrace{v \frac{d\boldsymbol{u_t}}{dt}} \qquad 1.14$$

$(\boldsymbol{a_t})$ $(\boldsymbol{a_n})$

Prove-se que $\frac{d\boldsymbol{u_t}}{dt}$ é normal a $\boldsymbol{u_t}$. Como $\boldsymbol{u_t}$ é um vector unitário $\boldsymbol{u_t} \cdot \boldsymbol{u_t} = 1$, então $\boldsymbol{u_t} \cdot \frac{d\boldsymbol{u_t}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{u_t}}{dt} \cdot \boldsymbol{u_t} = 0$, logo $2\left(\boldsymbol{u_t} \cdot \frac{d\boldsymbol{u_t}}{dt}\right) = 0$, o que implica que $\boldsymbol{u_t} \perp \frac{d\boldsymbol{u_t}}{dt}$.

Da expressão anterior verifica-se que a aceleração tangencial e a aceleração normal resultam da variação no tempo, respectivamente, do valor absoluto da velocidade e da direcção desta.

Embora não se apresente a prova, sabe-se que $\frac{du_t}{dt} = \frac{v}{\rho}$ em que ρ é o raio da trajectória. Finalmente a expressão 1.14 escreve-se:

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{dv}{dt}\,\boldsymbol{u_t} + \frac{v^2}{\rho}\,\boldsymbol{u_n}$$

1.7. Problemas

1. Dois barcos com velocidade v atravessam um rio cuja largura entre as margens é *d*, sendo a velocidade da corrente *u*. O primeiro barco segue o caminho mais curto, enquanto que o segundo segue o percurso mais rápido, comparar os tempos gastos por ambos ao atravessarem o rio.

2. A velocidade do som no ar à temperatura de 25^{o}C é 358m/s. Determinar a mesma velocidade quando medida por um observador animado de um movimento uniforme e rectílineo, 90km/h,

a) ao afastar-se da fonte;

b) ao aproximar-se da fonte;

c) perpendicularmente à direcção de propagação do som;

d) numa direcção tal que o som pareça propagar-se perpendicularmente ao movimento do observador.

3. A posição de um ponto material P num referencial O é dada por

$$\boldsymbol{r}(\text{t}) = (6\text{t}^2-4\text{t})\boldsymbol{i} + (-3\text{t}^3)\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}.$$

a) Determine a velocidade de um outro referencial, O', em relação ao primeiro, se a posição de P em O' é dada por $\boldsymbol{r}'(\text{t}) = (6\text{t}^2+3\text{t})\boldsymbol{i} + (-3\text{t}^3)\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$.

b) mostre que a aceleração do ponto material em relação a cada um dos referenciais é a mesma.

4. Os vectores posição de dois pontos materiais num referencial S são dadas por

$$\boldsymbol{r}_1(t) = t\boldsymbol{i} - t^2\boldsymbol{j} + (2t+3)\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{r}_2(t) = (2t-3t^2)\boldsymbol{i} + 4t\boldsymbol{j} - t^3\boldsymbol{k}$$

determine:

a) a velocidade relativa de um ponto em relação ao outro;

b) a aceleração do primeiro ponto em relação ao segundo no instante t=1s.

5. As equações paramétricas da trajectória de um ponto material num referencial S são: $x_1 = t^2 - 4t + 1$, $x_2 = -2t^4$, $x_3 = 2t^2$. Num outro referencial S' as equações são:

$$x'_1 = t^2+t+2 \qquad x'_2 = -2t^4+5 \qquad x'_3 = 3t^2 - 7$$

a) qual a velocidade de S' em relação a S?

b) qual a aceleração do ponto material em relação a cada um dos referenciais?

6. Às 12.0 horas um barco (A) encontra-se a 10km para leste e a 20 km para norte em relação a um determinado porto, navegando com uma velocidade de 40km/hora ao longo de uma direcção que faz 30ºE em relação ao Norte. No mesmo instante um barco (B) está localizado a 50km para leste e a 40 km para norte em relação ao mesmo porto, navegando com uma velocidade de 20km/hora ao longo de uma direcção que faz 30ºW em relação ao Norte. Determine:

a) a velocidade de B em relação a A;

b) a posição e o instante em que os navios se encontram mais perto, no caso de manterem as mesmas velocidades.

7. Sob a influência de uma força, um ponto material, com a massa m, move-se segundo a trajectória $\boldsymbol{r}(t) = (\text{a}\cos\omega t)\,\boldsymbol{i} + (\text{a}\,\text{sen}\omega t)\,\boldsymbol{j} + \text{b}t^2\boldsymbol{k}$, em que a,b e ω são constante.

a) mostre que, embora a velocidade aumente com o tempo, o valor da aceleração é constante;

b) determine o tipo de trajectória através do traçado geométrico.

8. Sob a influência de uma força, um ponto material, com a massa m, move-se segundo a trajectória $\boldsymbol{r}(t) = (\text{a cos}\omega t)\boldsymbol{i} + (\text{b sen}\omega t)\boldsymbol{j}$, em que a,b e ω são constantes.

a)Determine o tipo de trajectória através do seu traçado;

b)mostre que a aceleração do movimento é dirigida para a origem do referencial;

c) determine a componente normal e tangencial da aceleração.

9. Os raios orbitais de Vénus e Marte são, respectivamente, 0.72 e 1.52 vezes o raio da órbita terrestre; os seus periodos de revolução são aproximadamente 0.62 e 1.88 vezes o periodo terrestre, respectivamente. Com estes dados, assumindo que as órbitas se encontram no mesmo plano, construa graficamente os movimentos dos dois planetas em relação à Terra.